L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

Esponenziali e logaritmi nell'*Introductio in Analysin Infinitorum* di Eulero: proposte di lavoro in classe con il testo originale

Sommario

In questo articolo presentiamo un lavoro di Eulero del 1745 riguardante gli esponenziali e i logaritmi. Si tratta del capitolo 6 del vol. I del celebre trattato Introductio in Analysin Infinitorum. *Questo capitolo può essere utilizzato a livello didattico perché Eulero presenta gli argomenti proprio con questo intento e il testo originale, in latino, si può proporre da commentare in classe.*

Abstract

In this article we present a work by Euler of 1745 regarding exponentials and logarithms. It is chapter 6 of vol. 1 of the famous treatise Introductio in Analysin Infinitorum. *This chapter can be used on a didactic level because Euler presents the arguments with this intention and the original text, in Latin, can be proposed for comment in class.*

Adriano Demattè
Luigi Tomasi

Esponenziali e logaritmi nell'*Introductio in Analysin Infinitorum* di Eulero: proposte di lavoro in classe con il testo originale

Adriano Demattè – Luigi Tomasi
Centro Ricerche Didattiche "Ugo Morin"

Introduzione

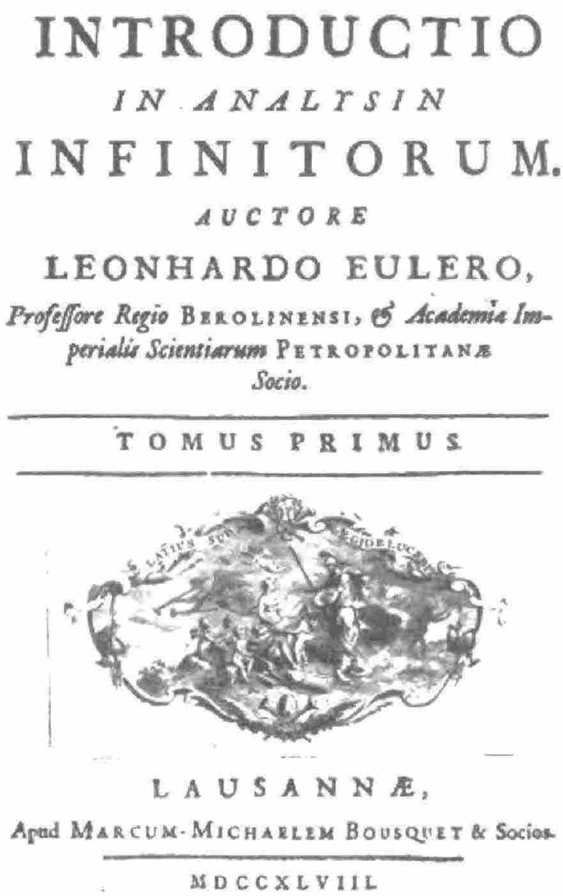
Il presente articolo fa seguito ad altri due relativi alle opere di Eulero (Leonhard Euler, 1707-1783), già apparsi su questa rivista: (Demattè e Tomasi, 2022) ha illustrato la "formula per i poliedri" con riferimento all'originale *Elementa Doctrinae Solidorum*; (Demattè e Tomasi, 2023) si è occupato della cosiddetta "retta di Eulero", di cui in *Solutio Facilis Problematum Quorumdam Geometricorum Difficillimorum*.

Anche in questo articolo presentiamo un originale di Eulero, unitamente alla proposta di lavoro in classe. L'opera a cui ci riferiamo è la celebre *Introductio in Analysin Infinitorum*, scritta nel 1745, in latino, e pubblicata nel 1748. Il primo volume dell'originale è consultabile a questo indirizzo:
https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1100&context=euler-works

All'*Introductio* seguirono l'*Institutiones calculi differentialis* (1755) e l'*Institutiones calculi integralis* (1768). Una delle caratteristiche che rendono queste opere eccezionali è che sono rivolte a chi vuole intraprendere lo studio della matematica partendo da un livello introduttivo, fino a livelli superiori. Questo le porta ad essere,

Mensile
10-2023
Pagina 307/26
Foglio 3 / 20
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

riteniamo, delle risorse imperdibili anche dal punto di vista della didattica nella scuola secondaria superiore.



INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & *Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ *Socio.*

TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLVIII.

Figura 1 – Frontespizio dell'opera di Eulero (I volume).

L'*Introductio in Analysin Infinitorum* è suddivisa in due volumi. La prima traduzione in lingua inglese è stata pubblicata a cura di John D. Blanton (1927-2016), (Blanton, 1988). In rete, a questo indirizzo: www.17centurymaths.com/contents/introductiontoanalysisvol1.htm è possibile consultare la successiva traduzione in inglese (Bruce, 2013), con acclusa una trascrizione dell'originale latino. È del 2022 la prima traduzione italiana del I volume (Suriano, 2022).

Il primo volume tratta delle funzioni, delle loro trasformazioni, della loro rappresentazione in serie di potenze, delle funzioni di due o più variabili, delle funzioni trascendenti, delle funzioni esponenziali, logaritmiche, goniometriche, delle frazioni continue. Il secondo volume è invece dedicato alle curve.

Nella *Prefazione*, Eulero esordisce con una riflessione che riteniamo importante dal punto di vista didattico: parla infatti delle difficoltà nell'affrontare l'analisi, in particolare il concetto di infinito, e le collega a quelle che uno studente incontra in algebra (fig. 2).


Æpenumero animadverti, maximam difficultatum partem, quas Matheſeos cultores in addiſcenda Analyſi infinitorum offendere ſolent, inde oriri, quod, Algebra communi vix apprehenſa, animum ad illam ſublimiorem artem appellant; quo fit, ut non ſolum quaſi in limine ſubſiſtant, ſed etiam perverſas ideas illius infiniti, cujus notio in ſubſidium vocatur, ſibi forment.

Figura 2.

Riconosce, poi, che non è però necessaria una conoscenza esaustiva dell'algebra e delle sue tecniche, e che vi sono parti specifiche necessarie alla preparazione del discente. Queste però sono omesse o non trattate in modo adeguato nei comuni trattati.

Rispetto ad una esperienza di laboratorio matematico riguardante l'utilizzo del capitolo della *Introductio in analysin infinitorum* di cui ci stiamo occupando (il cap. VI - *De Quantitatibus exponentialibus ac Logarithmis*), si veda l'indagine esplorativa illustrata in (Demattè & Furinghetti, 2014). Inoltre, il paragrafo 103 è stato utilizzato per l'esperienza didattica descritta in (Demattè, 2022).

Mensile
10-2023
Pagina 307/26
Foglio 5 / 20
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE
www.ecostampa.it

Alcuni passi del capitolo VI *De Quantitatibus exponentialibus ac Logarithmis* (Sulle quantità esponenziali e logaritmiche)

Con riferimento a ciascuno dei paragrafi in cui il capitolo è suddiviso, riportiamo alcuni punti che consideriamo salienti per il lavoro in classe. Riteniamo che con gli studenti sia significativo fare costante riferimento al documento originale consultabile online. Si noterà che alcune scritture possono dare luogo a riflessioni critiche.

Il **paragrafo 96** è introduttivo. In esso Eulero nota, fra l'altro, che funzioni esponenziali possono apparire ad esponente a^{a^z}, a^{y^z}, y^{a^z}, x^{y^z}, ma che si limiterà allo studio di quelle della forma a^z.

97. Eulero puntualizza l'utilizzo degli esponenti: numeri interi positivi, negativi e numeri frazionari. Afferma come "radicum extractio semper valores multiformes producat" e mostra il seguente esempio:

"valor $a^{\frac{5}{2}}$ sit æque $= - aa\sqrt{a}$, ac $= + aa\sqrt{a}$", specificando però che avrebbe utilizzato solo il secondo valore.

Si noti che Eulero scrive il quadrato di a nella forma "aa". Si osservi inoltre che oggi l'estrazione di radice, come funzione reale di una variabile reale, deve fornire uno ed un solo valore.

98. Eulero esamina i casi in cui la base a è uguale a 1, in cui $a > 1$ e in cui $a < 1$. Si esprime in termini di crescenza e decrescenza.

99. Si sofferma sulle conseguenze che determinerebbe l'adozione di una base negativa.

100. Evidenzia che la base che utilizzerà sarà positiva e maggiore di 1. Considera che l'esponente z può variare da $+\infty$ a $-\infty$ e che y può assumere tutti i valori che vanno da $+\infty$ a 0 (escluso).

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

101. Eulero considera l'equazione $y^n = a^{nz}$ e vari esempi, al variare di n nell'insieme dei numeri razionali. Considera $v = a^x$ da cui ricava $vy = a^{x+z}$ e $\frac{v}{y} = a^{x-z}$. Segue un esempio con le potenze di 10.

102. Introduce il logaritmo $z = ly$ (ossia, $z = \log y$, con base a) partendo dall'uguaglianza $a^z = y$.

103. Eulero considera che $l1 = 0$, $la = 1$, $laa = 2$, $la^3 = 3$ ecc. $l\frac{1}{a} = -1$, $l\frac{1}{aa} = -2$, $l\frac{1}{a^3} = -3$ ecc.

104. Se $ly = z$, allora $lyy = 2z$, $ly^3 = 3z$ ecc. e in generale $ly^n = nz$; $l\sqrt{y} = \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}ly$, $l\frac{1}{\sqrt{y}} = ly^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}ly$. Inoltre, se $ly = z$ e $lv = x$, poiché $y = a^z$ e $v = a^x$, allora $lvy = z + z = lv + ly$ e $l\frac{y}{v} = z - x = ly - lv$.

105. Dopo aver considerato nei paragrafi precedenti il logaritmo (in base a) di potenze ad esponente razionale, Eulero esamina il caso $lb = \sqrt{n}$, da cui $a^{\sqrt{n}} = b$. Notiamo che l'espressione "numerorum surdorum" è tradotto da Suriano (2022, p. 134) con "radicali"; da Bruce (2013, p. 157) e Blanton (1988, p. 80) con "surds". Come nota Roero in https://web.math.unifi.it/archimede/islam/islam0.html, l'uso del termine "surdus" risale a Gherado da Cremona, XII sec., e si è mantenuto fino al XVIII sec. Le espressioni "neque rationaliter neque irrationaliter" e "transcendentes" si possono riferire rispettivamente a quanto detto da Eulero (1745) a proposito di "Functiones Algebraïcæ" e "Transcendentes", nel paragrafo 7, capitolo 1 - "De functionibus in genere".

106. In questo paragrafo, Eulero illustra un algoritmo per la determinazione del valore del logaritmo in base 10 di un numero. Posto $l\,y = z$ e $l\,v = x$, si avrà $l\sqrt{vy} = \frac{x+z}{2}$. Dunque, il logaritmo trasforma la media geometrica tra due numeri (positivi) nella media

Mensile
10-2023
Pagina 307/26
Foglio 7 / 20
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

aritmetica dei loro logaritmi.
Eulero mostra in dettaglio la determinazione di un valore approssimato del logaritmo (in base 10) del numero 5. Il numero 5 è un valore compreso fra $A = 1$ e $B = 10$. Visto che la media aritmetica dei loro logaritmi è uguale al logaritmo della radice quadrata del loro prodotto, viene individuato un terzo valore $C = \sqrt{AB}$, minore di 5, che viene utilizzato con B, maggiore di 5, per determinare D, ecc. (si noti che nella tabella seguente ricavata dall'originale non compare il prodotto EF, bensì DF, in quanto sia E che F sono minori di 5; non compare GH in quanto sia G che H sono maggiori di 5, ecc.).

$A = 1, 000000,$	$l\,A = 0{,}0000000,$	sit
$B = 10{,}000000,$	$l\,B = 1{,}0000000,$	$C = \sqrt{AB}\,,$
$C = 3{,}162277,$	$l\,C = 0{,}5000000,$	$D = \sqrt{BC}\,,$
$D = 5{,}623413,$	$l\,D = 0{,}7500000,$	$E = \sqrt{CD}\,,$
$E = 4{,}216964,$	$l\,E = 0{,}6250000,$	$F = \sqrt{DE}\,,$
$F = 4{,}869674,$	$l\,F = 0{,}6875000,$	$G = \sqrt{DF}\,,$
$G = 5{,}232991,$	$l\,G = 0{,}7187500,$	$H = \sqrt{FG}\,,$
$H = 5{,}048065,$	$l\,H = 0{,}7031250,$	$I = \sqrt{FH}\,,$
$I = 4{,}958069,$	$l\,I = 0{,}6953125,$	$K = \sqrt{HI}\,,$
$K = 5{,}002865,$	$l\,K = 0{,}6992187,$	$L = \sqrt{IK}\,,$
$L = 4{,}980416,$	$l\,L = 0{,}6972656,$	$M = \sqrt{KL}\,,$
$M = 4{,}991627,$	$l\,M = 0{,}6982421,$	$N = \sqrt{KM}$
$N = 4{,}997242,$	$l\,N = 0{,}6987304,$	$O = \sqrt{KN}\,,$
$O = 5{,}000052,$	$l\,O = 0{,}6989745,$	$P = \sqrt{NO}\,,$
$P = 4{,}998647,$	$l\,P = 0{,}6988525,$	$Q = \sqrt{OP}\,,$
$Q = 4{,}999350,$	$l\,Q = 0{,}6989135,$	$R = \sqrt{OQ}\,,$
$R = 4{,}999701,$	$l\,R = 0{,}6989440,$	$S = \sqrt{OR}\,,$
$S = 4{,}999876,$	$l\,S = 0{,}6989592,$	$T = \sqrt{OS}\,,$

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

$T = 4{,}999963$,	$l\,T = 0{,}6989668$,	$V = \sqrt{OT}$,
$V = 5{,}000008$,	$l\,V = 0{,}6989707$,	$W = \sqrt{TV}$,
$W = 4{,}999984$,	$l\,W = 0{,}6989687$,	$X = \sqrt{WV}$,
$X = 4{,}999997$,	$l\,X = 0{,}6989697$,	$Y = \sqrt{VX}$,
$Y = 5{,}000003$,	$l\,Y = 0{,}6989702$,	$Z = \sqrt{XY}$,
$Z = 5{,}000000$,	$l\,Z = 0{,}6989700$.	

107. Il rapporto fra i valori del logaritmo in due basi diverse di uno stesso numero, comunque scelto, è costante. Infatti, se $a^p = n$ e $b^q = n$, si ha $a^p = b^q$ e quindi $a = b^{\frac{q}{p}}$. L'esponente q/p non dipende dal numero positivo n. Come esempio, Eulero mostra che se i logaritmi in base 10 vengono moltiplicati per 3,3219280 (valore approssimato), si può ottenere la tavola dei logaritmi in base 2 (a partire dunque dalla tavola in base 10). Infatti, in base 2 si ha $l\,2 = 1$ e in base 10 si ha $l\,2 \approx 0{,}3010300$[1]. Scegliendo per n il valore 2, Eulero può scrivere l'uguaglianza di rapporti $0{,}3010300 : 1 = p : q$ da cui $q = \frac{p}{0{,}3010300} = 3{,}3219280 \cdot p$.

108. Al variare della base a, rimane costante il rapporto fra il logaritmo di due numeri fissati. Infatti, scelti $M = a^m$ ed $N = a^n$, si ha $a^{mn} = M^n = N^m$ e quindi $M = N^{\frac{m}{n}}$, uguaglianza in cui la base a non compare.

109. Eulero fa notare che, allo scopo di costruire le tavole dei logaritmi di numeri naturali, è sufficiente determinare con il metodo esaminato precedentemente, o con un altro metodo, il logaritmo dei numeri primi. Quello dei numeri composti si potrà ricavare come somma dei logaritmi dei singoli fattori.

[1] Per quanto riguarda la determinazione del valore, approssimato, di $\log_{10} 2$, si veda anche (Euler, 1771, par. 235).

Mensile
10-2023
Pagina 307/26
Foglio 9 / 20
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

110. In questo paragrafo, Eulero considera un'espressione letterale frazionaria contenente radicali e ne esprime il logaritmo. Seguono quattro esempi: 1. determinazione del valore approssimato di $2^{\frac{7}{12}}$; 2. determinazione della popolazione dopo 100 anni, sapendo che inizialmente è di 100 000 abitanti e che cresce di un trentesimo all'anno; 3. determinazione del tasso di accrescimento annuo, sapendo che da sei persone si passa a un milione in 200 anni. 4. determinazione dell'accrescimento annuo, sapendo che il numero di persone raddoppia ogni secolo.

111. Eulero introduce le equazioni esponenziali. Seguono due ulteriori esempi: 1. determinazione del tempo richiesto affinché una certa popolazione decuplichi, sapendo che cresce di un centesimo all'anno; 2. determinazione del tempo necessario all'estinzione di un debito di 40 000 fiorini, con un tasso d'interesse composto del 5% annuo, ma versando annualmente 25 000 fiorini.

112. Illustra il significato della caratteristica (parte intera) e della mantissa (parte decimale) di un logaritmo; si sofferma sui logaritmi in base dieci.

113. Prosegue ampliando il discorso avviato nel paragrafo precedente. Presenta poi un altro esempio: considera la progressione 2, 4, 16, 256… nella quale ogni termine è il quadrato del precedente e la analizza con riferimento al logaritmo in base 10. Questo paragrafo conclude il Capitolo 6 dedicato ad esponenziali e logaritmi.

La proposta didattica

L'algoritmo esposto nel paragrafo 106, in cui Eulero illustra la determinazione del valore approssimato di log 5 (in base 10), è ripreso in (Zoccante e Chimetto, 2002) per una proposta didattica supportata dalla calcolatrice TI92 (oggi potremmo utilizzare calcolatrici analoghe): dopo essere risaliti ad alcuni dei valori riportati nella tabella riportata nell'originale di Eulero, la ripetitività dei calcoli suggerisce di tradurre il procedimento utilizzando un linguaggio di programmazione; viene quindi discussa la convergenza dell'algoritmo.

Il riferimento al testo originale di Eulero consente di mettere in evidenza aspetti che vanno anche oltre il contenuto matematico. Consideriamo, come esempio, il seguente passo tratto ancora dal paragrafo 106:

Sic ergo mediis proportionalibus ſumendis tandem perventum eſt ad $Z = 5,\ 000000$, ex quo Logarithmus numeri 5 quæſitus eſt $0,\ 698970$, poſita baſi Logarithmica $= 10$. Quare erit proxime $10^{\frac{69897}{100000}} = 5$. Hoc autem modo computatus eſt canon Logarithmorum vulgaris à BRIGGIO & VLACQUIO, quamquam poſtea eximia inventa ſunt compendia, quorum ope multo expeditius Logarithmi ſupputari poſſunt.

Figura 3.

Nel passo di fig. 3, Eulero evidenzia che attraverso il calcolo dei medi proporzionali (ad esempio, considerando che $C = \sqrt{AB}$, avremmo potuto scrivere la proporzione continua $A\colon C = C\colon B$) si giunge al logaritmo in base 10 di 5. Riporta il valore approssimato così ottenuto, sia in forma di frazione che utilizzando la notazione esponenziale. È evidente come questi due aspetti siano importanti anche dal punto di vista didattico, nell'ottica di recupero delle conoscenze degli alunni con una preparazione debole.

Nello stesso passo, inoltre, compaiono i nomi (latinizzati) di due matematici che hanno dato contributi fondamentali al tema dei logaritmi. Si tratta di Henry Briggs (citato come "Briggio", 1561 - 1630) – matematico inglese che introdusse i logaritmi in base 10 partendo dai logaritmi di Nepero (John Napier, 1550 - 1617) – e di

Mensile
10-2023
Pagina 307/26
Foglio 11 / 20

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

www.ecostampa.it

Adriaan Vlacq ("Vlacquio", 1600 - 1667), matematico olandese che pubblicò le tavole dei logaritmi a dieci cifre decimali, per valori da 1 a 100 000; si veda (Rosso, 2011). Per quanto riguarda l'originalità dei contributi di Eulero alla storia dei logaritmi, si veda (Rosso, 2016).

La motivazione dei matematici ad avere tavole dei valori (approssimati) dei logaritmi era legata al fatto che il calcolo dei logaritmi di prodotti, di quozienti e di potenze ad esponente razionale sono rispettivamente riconducibili ad addizioni, sottrazioni e moltiplicazioni per tali esponenti, operazioni queste ultime più facili da svolgere rispetto alle precedenti. Ciò era particolarmente importante per le applicazioni pratiche, come per esempio per i calcoli astronomici fatti da Keplero, in assenza di altri strumenti di calcolo.

Fino agli Settanta del secolo scorso è rimasto in uso il *regolo calcolatore*, costituito da asticelle scorrevoli l'una rispetto all'altra, graduate secondo una scala logaritmica. Esso sfrutta le proprietà poc'anzi citate. L'uso di questo strumento ha dei limiti legati alla precisione, ma la praticità e la velocità di utilizzo lo rendevano un ottimo sussidio in molte circostanze, soprattutto per gli ingegneri.

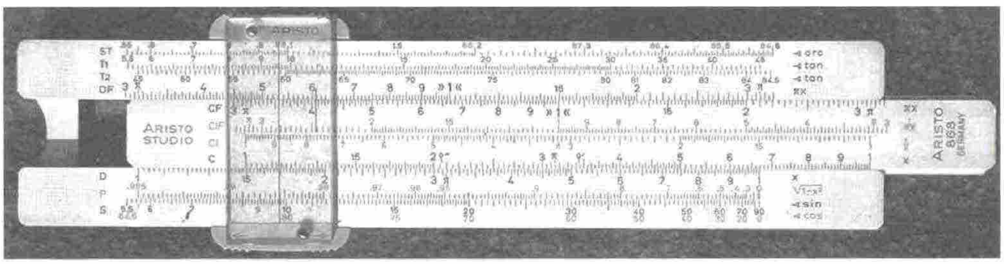


Figura 4 – Un regolo calcolatore (anni Sessanta).

Nelle righe conclusive del passo riportato in fig. 3, Eulero evoca l'utilità delle tavole dei logaritmi, meglio precisata nel paragrafo 110. Nel paragrafo 109, chiarisce come costruirle partendo dal logaritmo

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

dei numeri primi (qui sfrutta il Teorema fondamentale dell'Aritmetica riguardante la fattorizzazione, unica, di un numero intero maggiore di 1; per esempio, si ha: $\log 20 = 2\log 2 + \log 5$).

Proponiamo ora un'analisi dettagliata di uno dei problemi riportati da Eulero. Pensandolo destinato all'approfondimento, si qualifica per l'utilizzo integrato di vari aspetti matematici: calcolo algebrico, progressioni geometriche, interesse composto, proprietà dei logaritmi.

Esempio 2, paragrafo 111

Qualcuno deve restituire 400 000 fiorini al tasso di interesse annuo del 5%, ma ogni anno versa 25 000 fiorini. Si chiede in quanti anni il debito si può considerare estinto.

Eulero indica con a il debito totale e con b la somma restituita ogni anno. Alla fine del primo anno rimangono da restituire $\frac{105}{100}a - b$ fiorini.

Dopo due anni: $\left(\frac{105}{100}a - b\right)\cdot\frac{105}{100} - b = \left(\frac{105}{100}\right)^2 a - \frac{105}{100}b - b$.

Dopo tre anni: $\left(\frac{105}{100}\right)^3 a - \left(\frac{105}{100}\right)^2 b - \frac{105}{100}b - b$.

Scrivendo per brevità n al posto di $\frac{105}{100}$, abbiamo:

$n^x a - n^{x-1}b - n^{x-2}b - n^{x-3}b - \dots\dots\dots\dots - b =$

$n^x a - b(1 + n + n^2 + \dots\dots n^{x-1})$.

Si consideri la progressione geometrica:

$1 + n + n^2 + \dots\dots n^{x-1} = \frac{n^x - 1}{n-1}$. Dopo x anni, il debito è:

$n^x a - \frac{n^x b - b}{n-1}$ fiorini. Ci stiamo chiedendo quando esso sarà ridotto a zero, vale a dire quando $n^x a = \frac{n^x b - b}{n-1}$. Dunque, $(n-1)n^x a = n^x b - b$ e $(n-1)n^x a - n^x b = -b$ da cui $(na - a - b)n^x = -b$, $(b - na + a)n^x = b$; perciò $n^x = \frac{b}{b - na + a}$.

Mensile
10-2023
Pagina 307/26
Foglio 13 / 20
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE
www.ecostampa.it

Grazie alle proprietà dei logaritmi di una potenza e di un quoziente, si ha $x = \frac{lb - l(b-(n-1)a)}{ln}$. Sostituendo si ottiene:
$(n-1)a = 20\,000$ e $b-(n-1)a = 5\,000$ e $x = \frac{l25\,000 - l5\,000}{l\frac{105}{100}} = \frac{l5}{l\frac{21}{20}} = \frac{6989700}{211893}$, vale a dire poco meno di 33 anni.

Dopo esattamente 33 anni, il creditore dovrà restituire al debitore $\frac{(n^{33}-1)b}{n-1} - n^{33}a$ fiorini. Riducendo a denominatore comune e raccogliendo n^{33}, si ha $\frac{n^{33}(b-na+a)-b}{n-1}$. Sostituendo:

$$\frac{\left(\frac{21}{20}\right)^{33}\left(25\,000 - \frac{21}{20}400\,000 + 400\,000\right) - 25\,000}{\frac{21}{20}-1} =$$

$$\frac{\left(\frac{21}{20}\right)^{33}(25\,000 - 420\,000 + 400\,000) - 25\,000}{\frac{1}{20}} = 100\,000\left(\frac{21}{20}\right)^{33} - 500\,000.$$

Essendo $l\frac{21}{20} = 0{,}0211892991$, sarà $l\left(\frac{21}{20}\right)^{33} = 0{,}69924687$ e $l100\,000\left(\frac{21}{20}\right)^{33} = 5{,}6992469$ a cui corrisponde il numero 500318,8. Sicché, dopo 33 anni, il creditore deve restituire al debitore $318\frac{4}{5}$ fiorini.

Rispetto all'originale, abbiamo aggiunto il dettaglio di alcuni passaggi. Trattandosi di un problema destinato all'approfondimento, si potrà lasciare che gli stessi studenti li ricostruiscano.

Evidentemente, l'insegnante potrà vedere l'opportunità di far lavorare gli studenti fornendo loro solo il testo del problema, lasciando direttamente a loro di indagare le modalità di risoluzione. Potrà, in caso, pensare di fornire delle facilitazioni, degli spunti come, ad esempio, una traccia attraverso parole-chiave: utilizzare la frazione $\frac{105}{100}$, ricavare una progressione geometrica, risolvere un'equazione logaritmica. Si può notare che nell'ultima parte della risoluzione, Eulero risponde a una domanda non presente nel testo: con gli studenti, dopo essere giunti al numero degli anni sufficienti affinché il debito sia estinto, si potrà esplicitamente chiedere loro di determinare, appunto, quanti fiorini dovrà restituire il creditore al debitore dopo esattamente 33 anni.

Il capitolo, come si diceva, si pensa di utilizzarlo come rinforzo o, per molti aspetti, recupero delle abilità e competenze riguardanti il tema esponenziali e logaritmi. Nel primo caso, pensiamo a uno studente in grado di fare una lettura critica del documento, anche rispetto ad alcuni punti discutibili. Pensiamo, ad esempio, alle scritture molto "disinvolte" di Eulero $0^{-3} = \frac{1}{0^3} = \frac{1}{0}$ e $z = \infty$ che possono consentire di aprire una discussione: perché non sono oggi accettabili senza una loro interpretazione riferita ai limiti di funzione? (è impossibile dividere per 0 in quanto...; ∞ non è un numero e quindi non si può sostituire alla variabile con i cui valori si pensa di fare le operazioni...).

Un altro punto che può suggerire un'analisi critica assieme agli studenti è, come in precedenza accennato, l'esempio riportato nel paragrafo 97 e riguardante l'affermazione per cui l'estrazione di radice produce più di un valore. Notiamo che Eulero si sofferma sulla "radice quadrata". Una discussione di questi aspetti, con riferimento anche a quanto riportato in (Eulero, 1765), è presente in (Thomaidis & Tzanakis, 2022): l'uso di $\sqrt{\ }$ come simbolo algebrico che rinvia a più valori si pone in relazione con il più generale tema settecentesco dello studio di funzioni a più valori, in cui si inserisce il dibattito sul logaritmo di numeri negativi o complessi; l'*Introductio* ha come primo capitolo l'esame dei vari tipi di funzione e il paragrafo 11 parla proprio di "Functio biformis".

Mensile
10-2023
Pagina 307/26
Foglio 15 / 20

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

Un elenco di domande

Proponiamo qui di seguito un elenco di domande alle quali lo studente potrà trovare risposta all'interno del documento; contrassegniamo con 'r' quelle che riteniamo destinate al recupero, con 'a' quelle destinate all'approfondimento. Potranno essere utilizzate come guida per ripercorrere il documento, mettendone a fuoco gli aspetti principali. L'insegnante potrà ritenerle sufficienti o integrarle con altre; segnalerà agli studenti che dovranno analizzare anche le parti del documento a cui le domande non fanno diretto riferimento, se queste saranno considerate parte degli obiettivi dell'attività. L'insegnante potrà elaborare altre domande analoghe per le prove di verifica.

Alcune domande sollecitano lo studente ad accedere al documento per ricavare la risposta (come, ad esempio, la domanda 3). Per rispondere ad alcune o per completarne altre, è richiesto un ragionamento personale (come nel caso della 4). Il riferimento al documento contribuisce a dare un senso ad alcune domande (ad esempio alla 18).

Dal punto di vista del metodo che ispira la nostra proposta, perciò, intendiamo che in una prima fase le domande siano parte della proposta dell'insegnante che vorrà portare gli studenti a mettersi in relazione con il documento. In una seconda fase, lo studente sarà chiamato a rendere conto attraverso una prova di verifica, in cui siano presenti domande analoghe, a cui rispondere con o senza l'utilizzo del documento di Eulero. Il ruolo delle domande che qui di seguito proponiamo è dunque duplice: anzitutto, come si diceva sopra, introduttivo, di guida; inoltre, le domande vengono a costituire un modello di quelle che lo studente troverà nella prova di verifica.

1. Come si distinguono funzioni algebriche ed esponenziali ("quantitates exponentiales")? (r)
2. Considerata la funzione $y = a^z$, quali espressioni ottiene Eulero sostituendo a z, rispettivamente, -2, 1/2, 2/3? Come giustifichi il fatto che se $z = \sqrt{7}$ si ottiene un valore di a^zcompreso fra a^2 e a^3? (r)
3. Cosa afferma Eulero riguardo al caso in cui la base è uguale a 1? Esprimi in termini di crescenza/decrescenza quanto afferma nel caso in cui $a > 1$ e nel caso in cui $a < 1$. (r)
4. Come giustifichi il fatto che se $a < 1$ allora $1/a > 1$? Questa disuguaglianza varrebbe anche nel caso in cui a fosse un numero negativo? (r)
5. Nel caso in cui a fosse negativo, quali sarebbero le conseguenze illustrate da Eulero nel caso di esponenti interi? E nel caso di esponenti frazionari? (r)
6. Completa la seguente scrittura $\lim\limits_{\dots} \dots = \dots$ per esprimere l'affermazione "sit z = ∞, erit y = ∞". Ripeti con "si z = − ∞, fiet y = 0": $\lim\limits_{\dots} \dots = \dots$ (r)
7. Illustra le seguenti uguaglianze menzionando le rispettive proprietà delle potenze: "$vy = a^{x+z}$ & $\frac{v}{y} = a^{x-z}$". (r)
8. Da $a^z = y$ ricava la corrispondente scrittura logaritmica. (r)
9. Perché $l1 = 0$? (r)
10. Eulero illustra l'uguaglianza generale $l\, y^n = n\, ly$ attraverso valori particolari di n: riportane almeno due. (r)
11. Considerando che $y = a^z$ e $v = a^x$, giustifica le uguaglianze che esprimono il logaritmo di un prodotto e il logaritmo di un quoziente. (r)

Mensile
10-2023
Pagina 307/26
Foglio 17 / 20
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE
www.ecostampa.it

12. Attraverso l'algoritmo illustrato da Eulero nel par. 106, calcola $\log_{10} 7$ fino ad ottenere almeno tre cifre decimali esatte. (a)
13. Utilizzando gli opportuni valori riportati nel paragrafo 107, determina i valori approssimati di $\log_2 100$ e $\log_{10} 8$. (a)
14. Utilizzando i valori del logaritmo in base 10 di 5 e di 2, stabilisci il logaritmo in base 10 di: 4, 8, 16, 32, 64, 20, 40, 80, 25, 50 con un'approssimazione al milionesimo. (a)
15. La popolazione di una certa regione è raddoppiata in due secoli. Qual è il tasso di accrescimento annuo? (a)
16. Utilizzando il valore del logaritmo di 21/20 indicato da Eulero, calcola $\log 1000\left(\frac{20}{21}\right)^{15}$. (a)
17. Di quanto differiscono i logaritmi in base 10 di 33,12 e di 33120000? (a)
18. Esamina la seguente affermazione: «Base 10, base 2: il fattore per cui moltiplicare $\log_{10} N$ nella formula "del cambiamento di base" è 3,3219280». A quale passo del documento ci si riferisce? Illustralo in sintesi. (a)

Riteniamo interessante notare come l'uso di queste domande da parte dell'insegnante aiuti a descrivere quelli che sono i suoi ruoli all'interno delle relazioni di classe. L'insegnante è: a) rappresentante dell'istituzione scolastica, nel momento in cui formula la proposta di lavoro agli studenti; b) artefice della relazione di alterità degli studenti, nel momento in cui propone sé stesso come guida e introduce l'autore del documento come portatore di un contenuto matematico; c) intermediario fra gli studenti e le richieste dell'istituzione, quando fornisce le domande che preludono alla prova di verifica; d) rappresentante dell'istituzione, quando formalizza tali richieste attraverso la stesura della prova di verifica.

Mensile
10-2023
Pagina 307/26
Foglio 18 / 20
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE
www.ecostampa.it

Conclusioni

Il lavoro di Eulero offre varie opportunità dal punto di vista didattico ed appare un'occasione sia per il recupero che per l'approfondimento. Crediamo di poter condividere con i lettori sensazioni e motivi di coinvolgimento che il documento è in grado di suscitare, in particolare la meraviglia di poter trovare in esso risorse per studenti con livelli di preparazione tanto diversi; l'interesse per l'analisi dell'originale latino dal punto di vista della terminologia, della notazione, dei riferimenti storici; la curiosità per Eulero come persona, al di là della figura di eminente matematico, indotta proprio dalla sua capacità di porsi in relazione con lettori tanto diversi – studenti ma, rispetto allo stesso documento, anche insegnanti, ricercatori in educazione matematica, storici.

La specifica realtà di classe suggerirà all'insegnante quali scelte fare rispetto al documento, ma riteniamo che non debba farsi sfuggire le opportunità offerte dal testo originale di Eulero. Potrà avvenire che sia chiamato ad affrontare il dilemma fra: a) l'esigenza di "salvaguardare" l'originale (e di individuare quali aspetti portarne a tema assieme agli studenti, quali collegamenti con gli altri capitoli di *Introductio in Analysin Infinitorum* operare, come evidenziare l'importanza del volume nel contesto dell'opera di Eulero e della storia della matematica) e b) l'opportunità di renderlo uno strumento adatto alle esigenze di ciascuno degli studenti (considerando che qualcuno ha l'esigenza di recuperare e riorganizzare i concetti affrontati in un'altra fase del lavoro in classe, qualcun'altro di affrontare nuovi quesiti, problemi e situazioni di utilizzo del logaritmo, altri ancora di approfondire vari concetti matematici, avendo la possibilità di integrarli in discorsi unificanti). Riteniamo che costituiscano un'opportunità rivolta a tutti gli studenti gli aspetti storici che l'originale richiama: l'uso del latino come lingua della

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

scienza nel Settecento, l'evoluzione del simbolismo matematico, la descrizione di altri personaggi della storia della matematica.

Bibliografia

Blanton, J. D. (1988). *Introduction to analysis of the infinite*, Books I and II. New York: Springer. Traduzione di (Euler, 1748).

Bruce, M. I. (2013). *Euler's Introductio in Analysin Infinitorum* vol. 1. Traduzione di (Euler, 1748), con note a cura del traduttore.

Demattè, A. (2022). Relazione etica degli studenti con un documento tratto dalla storia della matematica. *Didattica della Matematica*, n. 12, 22-44. Disponibile in: https://www.journals-dfa.supsi.ch/index.php/rivistaddm/issue/view/21.

Demattè, A. & Furinghetti, F. (2014). History in the mathematics laboratory: an exploratory study. In M. Kourkoulos & C. Tzanakis (Eds.), *Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση – Special Issue of Education Sciences* 114–130. University of Crete.

Demattè, A. e Tomasi, L. (2022). La formula di Eulero per i poliedri: una proposta didattica di uso delle fonti originali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 45B, N.1, 69-93.

Demattè, A. e Tomasi, L. (2023). La retta di Eulero: una proposta didattica di uso delle fonti originali nell'insegnamento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 46B, N.1, 69-94.

Euler, L. (1748). *Introductio in Analysin Infinitorum*. Lausannae: Apud Marcum-Michaelem Bousquet & socios.

Euler, L. (1771). *Vollstandige Anleitung zur Algebra*. St. Petersburg: Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. "Based on the 1828 edition of John Hewlett's 1822 translation", si veda l'edizione del 2015 disponibile in: https://archive.org/details/ElementsOfAlgebraLeonhardEuler2015/page/2/mode/1up.

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

Rosso, R. (2011). Appunti di storia dei logaritmi. III: Compilatori di tavole: Brigss. Keplero e Caramuel. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 34B, N.4, 425-451.

Rosso, R. (2016). Appunti di storia dei logaritmi. VI: La svolta euleriana. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 39B, N.4, 459-489.

Suriano, C. (2022). *Introduzione all'analisi degli infiniti*. Libro I, 1748. Traduzione di (Euler, 1748), con note a cura del traduttore. Milano: La Vita Felice.

Thomaidis, Y. & Tzanakis, C. (2022). Historical knowledge and mathematics education: a recent debate and a case study on the different readings of history and its didactical transposition. *ZDM-Mathematics Education*, 54(7).

Zoccante, S. e Chimetto, M. (2002). Antichi algoritmi e nuove tecnologie. *Progetto Alice,* III, n. 7, 63-78.

Note

L'accesso ai siti citati è stato verificato in data 18 giugno 2023.

Gli insegnanti che volessero fare osservazioni sulla proposta in tutte le sue varie fasi o condividere alcuni aspetti della sperimentazione in classe possono scrivere agli indirizzi di posta elettronica degli autori.